Я. Шохат.

О функциях, наименее уклоняющихся от нуля в бесконечном промежутке.

Чебышев ввел в науку понятие о функциях, наименее уклоняющихся от нуля, поставив такую задачу.

Пусть $f(x)$ есть заданная конечная и непрерывная функция вещественной переменной x, изменяющейся в конечном интервале (a, b). Среди многочленов степени $\leqq n$,

$$q(x) = q_n x^n + q_{n-1} x^{n-1} + \ldots + q_0$$

найти многочлен

$$\bar{q}(x) = \bar{q}_n x^n + \ldots,$$

наилучше представляющий функцию $f(x)$ в рассматриваемом промежутке: иными словами, величина

$$E_n(f) = \max |f(x) - \bar{q}(x)| \text{ при } a \leqq x \leqq b$$

не должна быть превзойдена ни при каком полиноме $q(x)$ степени $\leqq n$. В этом случае мы говорим по Чебышеву, что функция

$$\bar{\varphi}(x) \equiv f(x) - \bar{q}(x)$$

наименее уклоняется от нуля в промежутке (a, b) по сравнению со всеми функциями того же вида. Известно, что $\bar{q}(x)$—„полином наилучшего приближения" существует для всякой непрерывной функции и притом он единственный. Известно далее относительно „наилучшего приближения" $E_n(f)$, что

$$\lim_{n=\infty} E_n(f) = 0.$$

Все эти результаты установлены для *конечного* промежутка. В настоящей статье мы развиваем аналогичную теорию для *бесконечного* промежутка, при чем оказывается, что в общем предыдущие результаты сохраняют силу. Они прилагаются затем к теории полиномов Чебышева.

1. Начнем с обобщения некоторых известных теорем.

Пусть $f(x)$ и $p(x)$ ограничены и непрерывны в конечном промежутке (a, b). Примем далее, что существует интервал (α, β), не выходящий из (a, b), такой, что

$$(1) \quad \ldots \quad |p(x)| \geqq p_0 > 0 \text{ при } \alpha \leqq x \leqq \beta.$$

Тогда справедливы следующие предложения.

Теорема. Существует полином степени не выше n

$$\overline{q}(x) = \overline{q}_n x^n + \overline{q}_{n-1} x^{n-1} + \ldots + \overline{q}_0$$

такой, что функция

$$\overline{\varphi}(x) \equiv f(x) - p(x)\overline{q}(x)$$

наименее уклоняется от нуля в промежутке (a, b).

Теорема. Если $p(x) > 0$ *во всем промежутке* (a, b) *то* 1° μ — *число точек уклонения*

$$a \leqq x_1 < x_2 < \ldots < x_\mu \leqq b$$

где $\overline{\varphi}(x)$ *достигает наибольшего численного значения* $E_n(f)$ *удовлетворяет неравенству*

$$\mu > n + 1$$

2° *Полином* $\overline{q}(x)$ *единственный*

3° $lim_{n=\infty} E_n(f) = 0$

4° *Число перемен знака в ряду*

$$\overline{\varphi}(x_1), \overline{\varphi}(x_2) \ldots \ldots \overline{\varphi}(x_\mu)$$

превышает n.

Доказательство первой теоремы.

Величина $\Phi = {}_{max}|\varphi(x)| \equiv {}_{max}|f(x) - p(x)q(x)| \equiv$
$\equiv {}_{max}|f(x) - p(x)(q_n x^n + q_{n-1}x^{n-1} + \ldots + q_0)|$

при изменении x в промежутке (a, b) есть непрерывная функция коэффициентов q_i.

$$\Phi = l(q_0, q_1, \ldots q_n),$$

имеющая нижнюю границу λ, при чем

$$\lambda \leqq l(0, 0, \ldots 0) = f_{max},$$

если условимся всобще через u_{max}, u_{min} обозначать соответственно наибольшее и наименьшее значение $|u(x)|$ в рассматриваемом промежутке.

Вместе с тем

$$|pq|_{max} \leqq f_{max} + \leqq (q_0, q_1, \ldots q_n).$$

Достаточно поэтому взять такие многочлены $q(x)$, для которых

$$l(q_0, q_1, \ldots q_n) \leqq f_{max}$$

Для них

$$|pq|_{max} \leqq 2q_{max}.$$

По условию

$$p_0 \leq |p(x)| \text{ при } \alpha \leq x \leq \beta.$$

Следовательно

$$\left.\begin{array}{l} p_0 \,|\, q(x) \,| \leq |\, p(x)\, \bar{q}(x) \leq |\, pq\,|_{max} \leq 2 f_{max} \\ |\, q(x) \,| \leq 2 \dfrac{f_{max}}{p_0} \end{array}\right\} \alpha \leq x \leq \beta$$

Последнее неравенство позволяет заключить [1]), что коэффициенты q_i ограничены, а потому функция $l(q_0, q_1, \ldots q_n)$ *достигает* своей нижней границы при одной по крайней мере системе значений

$$q_i = \bar{q}_i \quad , i = 0, 1, 2, \ldots n,$$

и таким образом доказано существование полинома $\bar{q}(x)$.

Доказательство второй теоремы.

1°. *Число точек уклонения* $\mu > n + 1$.

Применим теорему Чебышева [2]): система уравнений

$$\frac{\partial \bar{\varphi}(x_1)}{\partial \bar{q}_i} \lambda_1 + \frac{\partial \bar{\varphi}(x_2)}{\partial \bar{q}_i} \lambda_2 + \ldots + \frac{\partial \bar{\varphi}(x_\mu)}{\partial \bar{q}_i} \lambda_\mu = 0 \; (i = 0, 1, 2 \ldots n)$$

должна иметь решение, отличное от очевидного

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots \lambda_\eta = 0,$$

если $\bar{\varphi}(x)$ наименее уклоняется от нуля

Эта система напишется так:

$$\lambda_1 p(x_1) x_1^i + \lambda_2 p(x_2) x_2^i + \ldots + \lambda_\mu p(x_\mu) x_\mu^i = 0 \; (i = 0, 1, 2 \ldots n)$$

При $\mu < n + 1$ система эта допускает единственное решение

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_\mu = 0,$$

ибо определитель первых μ уравнений,

как легко видеть, отличен от нуля, но тогда $\bar{\varphi}(x)$ не может быть требуемой функцией.

---

1) Borel: „Leçons sur les fonctions de variables réelles".

2) „Sur les questions de minima". Собрание сочинений, т. I.

2°. *Полином $\overline{q}(x)$ единственный.*

Допуская существование двух решений $\overline{\varphi}_1(x)$ и $\overline{\varphi}_2(x)$, находим их бесчисленое множество по формуле

$$\Phi(x) = \lambda_1\overline{\varphi}_1(x) + \lambda_2\overline{\varphi}_2(x)$$

$$\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0;\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1,\ \overline{\varphi}_i(x) = f(x) - p(x)\overline{q}(x)\ \ (i = 1, 2).$$

Действительно, во всем промежутке (a, b)

$$|\Phi(x)| \leqq \lambda_1|\overline{\varphi}_1(x)| + \lambda_2|\overline{\varphi}_2(x)| \leqq (\lambda_1 + \lambda_2)E_n(f) = E_n'(f).$$

По самому определению числа $E_n(f)$ заключаем, что знак $=$, здесь наверно имеет место в одной по крайней мере точке y промежутка (a, b), т. е.

$$|\Phi(y)| = E_n(f),$$

но это возможно тогда и только тогда, если

$$\overline{\varphi}_1(y) = \overline{\varphi}_2(y) = \pm E_n(f).$$

Только такие точки y могут служить точками уклонения функций $\Phi(x)$, наименее уклоняющихся от нуля. По доказанному выше их должно быть не менее $n + 2$, т. е. $\overline{\varphi}_1(x)$ и $\overline{\varphi}_2(x)$, а вместе с тем и полиномы $\overline{q}_1(x)$ и $\overline{q}_2(x)$ совпадают в $n + 2$ точках, следовательно,

$$\overline{q}_1(x) \equiv \overline{q}_2(x)$$

3°. $\lim\limits_{n=\infty} E_n(f) = 0.$

Ясно, что

$$E_n(f) > E_{n+1}(f),$$

ибо $q_n(x)$ можно рассматривать и как полином $n + 1$-й степени

Всякое $E_n' > 0$, ибо мы считаем, что $f(x)$ не совпадает ни с каким полиномом.

Из неравенств

$$E_1(f) \geqq E_2(f) \geqq \ldots E_n(f) \geqq \ldots$$

заключаем, что существует $\lim\limits_{n=\infty} E_n(f) = \lambda.$

Допущение $\lambda > 0$ означало-бы, что какова бы ни была степень многочлена $q(x)$, всегда

$$|f(x) - p(x)q(x)|_{max.} > \lambda,$$

откуда

$$\left[\frac{f(x)}{p(x)} - q(x)\right]_{max.} > \frac{\lambda}{p_{max.}},$$

что противоречит теореме Вейерштрасса, по которой непрерывную в интервале (a, b) функцию $\dfrac{f(x)}{p(x)}$ можно представить с помощью полинома с *любой* наперед заданной точностью.

4°. *Число перемен знака в ряду.*

$$\overline{\varphi}(x_1),\ \overline{\varphi}(x_2),\ \ldots\ \overline{\varphi}(x_\mu)$$

превышает n.

Для доказательства придется дословно повторить рассуждения А. А. Маркова.[1])

Замечание. Доказательство существования $\overline{\varphi}(x)$ требует лишь однозначности и ограниченности функций $f(x)$ и $p(x)$ в рассматриваемом промежутке; доказательство положения $\lim\limits_{n-\infty} E_n(f)=0$ требует еще, чтобы $\dfrac{f(x)}{p(x)}$ было непрерывно и ограничено, но не непрерывности самых функций $f(x)$ и $p(x)$.

Теорема. Если выполнены условия второй теоремы, если

$$a=-h,\ b=h,\ p(x)\equiv p(-x) \text{ при } -h\leqq x\leqq h,$$

и если $f(x)$ *есть* $\dfrac{\text{четная}}{\text{нечетная}}$ *функция в том же интервале, то искомый полином* $\overline{q}(x)$ *содержит одне лишь* $\dfrac{\text{четные}}{\text{нечетные}}$ *степени* x.

Доказательство вытекает из того, что искомая функция $\overline{\varphi}(x)$ единственная, и что соответственно условиям теоремы имеем еще одно решение

$$\begin{matrix}\overline{\varphi}(-x)\\ -\overline{\varphi}(-x).\end{matrix}$$

Следствие. Полином наилучшего приближения к данной непрерывной функции $f(x)$, $\dfrac{\text{четной}}{\text{нечетной}}$ в интервале $(-h, h)$, содержит одне лишь $\dfrac{\text{четные}}{\text{нечетные}}$ степени x.

Не останавливаясь на разборе частных случаев, отметим лишь, что при

$$f(x)\equiv x^{n+1},\ p(x)\equiv 1$$

получаем известные свойства многочлена вида

$$x^{n+1}\ldots\ldots,$$

наименее уклоняющегося от нуля в промежутке $(-h, h)$,

2. Перейдем к бесконечному промежутку. Для определенности примем

$$a=-\infty,\ b=\infty.$$

Лемма I. *Если функция* $\omega(x)$ *такова, что*

$$\lim_{x=\mp\infty}\omega(x)=0$$

[1]) „О функциях наименее уклоняющихся от нуля“, СПБ 1906 (лит.).

и если maxim. $|\omega'(x)|$ *в промежутке* $(-\infty, \infty)$ *равен конечному числу* M, *то найдется конечный интервал* α, β *такой что*

$$M = maxim.\ |\omega(x)|\ \textit{в интервале}\ (\alpha, \beta).$$

Доказательство. Найдем 2 конечных числа α, β таких, что

$$|\omega(x)| < \frac{M}{2} \text{ при } \begin{cases} x < \beta, \\ x > \alpha' \end{cases}$$

интервал (α, β) есть искомый.

Лемма II. *Если* $\omega(x)$ *ограничено в интервале* $(-\infty, \infty)$, *и притом*

$$\lim_{x=\mp\infty} \omega(x)x^i = 0 \quad (i = 0, 1, 2 \ldots).$$

то произведение

$$\omega(x)g(x) \equiv \omega(x)(g_m x^m + \ldots)$$

при всяком конечном m ограничено, если коэффиценты полинома ограничены.

Доказательство. Найдется интервал (α, β) такой, что

$$|\omega(x)g(x)| < \varepsilon \text{ при } \begin{cases} x \leq \alpha \\ x \geqq \beta' \end{cases}$$

где ε наперед заданное положительное число. Внутри интервала (α, β)

$$|\omega(x)g(x)| < Mg\frac{\gamma^{m+1}-1}{\gamma-1} = M',$$

где M', g и γ = наибольшему из чисел $|\alpha|$, $|\beta|$ — числа конечныя. Следов.

$$|\omega(x)g(x)| < M'' \text{ при } -\infty \leqq x \leqq \infty,$$

где M'' есть наибольшее из чисел M' и ε.

Лемма III. *Если* $\omega(x)$ *непрерывно при всех значениях* x, *и притом*

$$\lim_{x=\pm\infty} \omega(x) = 0,$$

то $\omega(x)$ *ограничено в интервале* $(-\infty, \infty)$.

Доказательство аналогично предыдущему.

Следствие. Если $\omega(x)$ непрерывно при всех значениях x и если $\lim\limits_{x=\pm\infty} \omega(x)$ = конечному числу l, то $\omega(x)$ ограничено в интервале $(-\infty, \infty)$.

Лемма III. *Если* $\omega(x)$ *удовлетворяет условиям леммы II, и если коэффициенты полинома*

$$g(x) = g_m x^m + g_{m-1}x^{m-1} + \ldots$$

подчинены неравенством

$$|g_i| < \varepsilon \qquad (i = 0, 1, 2 \ldots m)$$

то

$$|\omega(x)g(x)| < \varepsilon K \text{ при } -\infty \leqq x \leqq \infty,$$

где постоянная K не зависит от g.

Доказательство

$$|\omega(x)g(x)| < \varepsilon\,|\omega(x)|\,(x^m + x^{m-1} + \ldots) \text{ при } 0 \leqq x \leqq \infty$$

$$|\omega(x)g(x)| < \varepsilon\,|\omega(x)|\,(\pm x^m \mp x^{m-1} \pm \ldots) \text{ при } -\infty \leqq x \leqq 0$$

(знаки соответственно выбраны)

Следовательно

$$|\omega(x)g(x)| < \varepsilon K \text{ при } -\infty \leqq x \leqq \infty,$$

где K есть наибольшое из двух чисел

$$maxim.\ |\omega(x)|\,(x^m + x^{m-1} + \ldots) \text{ при } 0 \leqq x \leqq \infty$$

$$maxim.\ |\omega(x)|\,(\pm x^m \pm x^{m-1} \pm \ldots) \text{ при } -\infty \leqq x \leqq 0.$$

Следствие. Если коэффициенты полинома $g(x)$ все стремятся к нулю, то $\omega(x)g(x)$ стремится к нулю равномерно для всех значений x.

Будем называть функциями (φ) функции вида

$$\varphi) \ldots \varphi(x) \equiv f(x) - p(x)(q_n x^n + q_{n-1}x^{n-1} + \ldots) = f(x) - p(x)q(x)$$

Функции $f(x)$ и $p(x)$ подчиним следующим условиям:

$$(2)\ldots\left\{\begin{array}{l} f(x) \text{ непрерывно при всех значениях } x \\ \lim\limits_{x=\pm\infty} f(x) = 0; \\ p(x) \text{ непрерывно при всех значениях } x \\ \lim\limits_{x=\pm\infty} p(x)x^i = 0 \qquad (i = 0, 1, 2 \ldots); \\ \text{существует интервал } (\alpha, \beta) \text{ такой, что} \\ p(x) \geq p_0 > 0 \text{ при } \alpha \leq x \leq \beta. \end{array}\right.$$

Тогда справедливы следующие предложения.

Теорема I. *Существует полином степени не выше n*

$$\bar{q}(x) = \bar{q}_n x^n + \bar{q}_{n-1}x^{n-1} + \ldots$$

такой, что из функций (φ), функция

$$\bar{\varphi}(x) \equiv f(x) - p(x)\bar{q}(x)$$

наименее уклоняется от нуля в промежутке $(-\infty, \infty)$.

Доказательство разобьем на несколько частей.

1° Выбрав определенный конечный интервал a_1, b_1) за исходный, строим ряд интервалов

$$(3) \ldots (a_1, b_1), (a_2, b_2) \ldots (a_\kappa, b_\kappa) \ldots$$

при условии, что каждый предыдущий целиком содержится в последующем, и

$$\lim_{k=\infty} a_\kappa = -\infty, \lim_{k=\infty} b_\kappa = \infty.$$

Ясно, что при достаточно большом k интервал (α, β) будет содержаться в (a_κ, b_κ), и можно считать, что это обстоятельство имеет место при $k = 1$.

По доказанному выше каждому такому интервалу (a_κ, b_κ) отвечает полином степени не выше n—мы его обозначим $\overline{q}_\kappa(x)$—такой, что функции (φ)

$$\overline{\varphi}_\kappa(x) \equiv f(x) - p(x)\overline{q}_\kappa(x)$$

наименее уклоняется от нуля в интервале (a_κ, b_κ).

Уклонение от нуля этой функции пусть будет E_κ, т. е.

$$E_\kappa = maxim. \mid \overline{\varphi}_\kappa(x) \mid \text{ при } a_\kappa \leqq x \leqq b_\kappa$$

Нетрудно понять, что

$$E_1 \leqq E_2 \leqq \ldots \leqq E_\kappa \leqq \ldots$$

| равенство $E_\kappa = E_{\kappa+1}$ возможно лишь при $\overline{q}_\kappa(x) \equiv \overline{q}_{\kappa+1}(x)$ |.

Следов., существует

$$\lim_{\kappa=\infty} E_\kappa = E.$$

Покажем, что E *число конечное.*

Допустим противное. Если конечное число A означает

$$maxim. \mid f(x) - p(x)x^n \mid \text{ при } -\infty \leqq x \leqq \infty,$$

то в силу нашего допущения

$$E_\kappa > A \text{ при } n > \kappa_0,$$

а это противоречит определению E_κ.

2°. Полагая

$$\overline{q}_\kappa(x) = q_{n\kappa}x^n + q_{n-1\kappa}x^{n-1} + \ldots q_{0\kappa} (\kappa = 1, 2 \ldots),$$

рассматриваем совокупность

$$(4) \ldots \overline{q}_1(x) \; q_2(x) \ldots q_\kappa(x), \ldots$$

а наряду с ней совокупность точек в пространстве $n+1$ измерений

$$(5) \quad \overline{Q}_1,\ \overline{Q}_2, \ldots \overline{Q}_\kappa, \ldots$$

где точка

$$\overline{Q}_\kappa \equiv \overline{Q}_\kappa(\overline{q}_{n\kappa},\ q_{n-1,\kappa}, \ldots)$$

отвечает полиному $\overline{q}_k(x)$.

Из неравенства, справедливого при всяком κ

$$|\varphi_k(x)| < E \text{ при } a_1 \leqq x \leqq b_1$$

выводим, как и выше

$$|\overline{q}_\kappa(x)| < \frac{E+f_{max.}}{p_0} \text{ при } \alpha < x < \beta,$$

где $f_{max.}$ относится к интервалу $(-\infty, \infty)$.

Правая часть предыдущего неравенства не зависит от κ, а потому [1]) выводим:

$$|q_{i\kappa}| < K_i \qquad \begin{pmatrix}\kappa=1, 2 \ldots \\ i=0, 1, 2 \ldots n\end{pmatrix},$$

где K_i *не зависит от* κ. Но тогда совокупность (5) вся лежит внутри конечной области и, следов., имеет одну по крайней мере точку сгущения также на конечном расстоянии, назовем ее

$$\overline{Q}(q_n,\ q_{n-1}, \ldots q_0).$$

Иными словами, из совокупности (4) можно выделить совокупность

$$\overline{q}_{i_1}(x),\ \overline{q}_{i_2}(x), \ldots \overline{q}_{i_l}(x) \ldots$$

с предельным полиномом

$$\overline{q}(x) = \overline{q}_n x^n + \overline{q}_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \overline{q}_0 = \lim_{l=\infty} \overline{q}_i(x),$$

так что

$$\lim_{l=\infty} \varphi_i(x) = f(x) - p(x)\overline{q}(x) \equiv \overline{\varphi}(x)$$

равномерно для всех значений x.

3°. Для всякой функции (φ) введем обозначение

$$\Phi = maxim.\ |\varphi(x)| \text{ при } -\infty < x < \infty.$$

Не существует функции (φ), *для которой* $\Phi < E$.

Допустим противное. Тогда

$$E_\kappa > E - (E - \Phi) = \Phi \text{ при } \kappa > \kappa_0,$$

что невозможно.

---

[1]) Borel loc cit.

4°. Для функции

$$\varphi(x) \equiv f(x) - t(x)q(x)$$

справедливо равенство

$$\overline{\Phi} = E.$$

Действительно, по доказанному необходимо имеем

$$\overline{\Phi} \geq E.$$

Допуская $\overline{\Phi} > E$, строим конечный интервал (c, d) так, что

$$\overline{\Phi} \leq maxim. \mid \overline{\varphi}(x) \mid \text{ при } c \leq x \leq d.$$

С другой стороны, найдется целое число l_0 настолько большое, что

$$\left.\begin{array}{l} a_{i_e} \leq c,\ b_{i_e} \geq d \\ \mid \overline{\varphi}(x) - \varphi_{i_e}(x) \mid \leq \overline{\Phi} - E \text{ при } a_{i_e} \leq x \leq b_{i_e} \\ \mid \overline{\varphi}(x) \mid < \overline{\Phi} - E + E_{i_e} < \overline{\Phi} \text{ при } c \leq x \leq d \end{array}\right\} (l > l_0)$$

т. е.

что противоречит способу построения интервала (c, d).

Итак, $\overline{\Phi} = E$.

5°. Покажем в заключение, что *найденное выше число E не зависит ни от выбора исходного интервала (a_1, b_1), ни от закона составления беспредельно растущих интервалов* (3).

Пусть при другом способе составления интервалов (3) мы нашли другое предельное число E^x. Рассуждая, как выше, докажем, с одной стороны, невозможность существования функции (φ), для которой $\Phi < E^x$, с другой — существование функции $\varphi^x(x)$, для которой

$$\overline{\Phi}_x = E^x.$$

Итак, должно быть одновременно

$$E \geq E_x,\ E_x \geq E,$$

откуда необходимо следует

$$E^x = E.$$

Таким образом, существование *одной по крайней мере* функции (φ), наименее уклоняющейся от нуля в промежутке $(-\infty, \infty)$, доказано.

Теорема II. Если к условиям (2) добавить, что $p(x)$ положительно при всех значениях x, то: 1°. *Функция $\overline{\varphi}(x)$, наименее уклоняющаяся от нуля в интервале $(-\infty, \infty)$, единственная*: 2°. *Число μ точек уклонения ее превышает $n+1$*; 3°. *Число перемен знака в ряду.*

$$\bar\varphi(x_1),\ \bar\varphi(x_2), \ldots \bar\varphi(x_\mu)$$

превышает n.

Доказательство. Единственность функции $\varphi(x)$, в случае если будет установлено неравенство

$$\mu > n + 1,$$

выводится совершенно так же, как в § 1. Поэтому достаточно доказать 2^0.

Мы уже знаем, что $\varphi_\kappa(x)$ имеет при всяком κ

$$\mu_\kappa > n + 2$$

точек уклонения

$$x_{1,\kappa},\ x_{2,\kappa}, \ldots x_{\mu_{\kappa},\kappa} \qquad (\kappa = 1, 2, \ldots)$$

лежащих в интервале (a_κ, b_κ). Для краткости будем говорить о точке

$$X_\kappa \equiv X_\kappa(x_{1,\kappa}, x_{2,\kappa}, \ldots x_{\mu_{\kappa},\kappa})$$

и условимся символическим равенством

$$\bar\varphi_\kappa(X_\kappa) = E_\kappa$$

заменить систему μ_κ равенств

$$|\bar\varphi_\kappa(x_{j\kappa})| = E_\kappa \qquad (j = 1, 2, \ldots \mu_\kappa).$$

По доказанному, любому наперед заданному числу ε отвечает l_0 такое, что

$$(6) \ldots |\bar\varphi(x) - \bar\varphi_{i_e}(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ при всех } x \ (l \leq l_0).$$

Берем $l' > l_0$ так, чтобы иметь

$$E_{i_e} > E - \frac{\varepsilon}{2} \qquad (l \geq l'),$$

тогда

$$(7) \ldots \bar\varphi(X_{i_e}) > E - \varepsilon \qquad (l \geq l').$$

Вообразим теперь совокупность беспредельно убывающих чисел

$$\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots > \varepsilon_s > \ldots, \lim_{s=\infty} \varepsilon_s = 0.$$

Им отвечает совокупность точек

$$(8) \ldots X_{i_{e_1}},\ X_{i_{e_2}},\ \ldots X_{i_{e_s}} \ldots$$

так, что

$$(9) \ldots \left\{ \begin{array}{l} |\bar\varphi(x) - \bar\varphi_{i_{e_s}}(x)| < \dfrac{\varepsilon_s}{2} \text{ при всяком } x \\ \bar\varphi(X_{i_{e_s}}) > E - \varepsilon_s > \dfrac{E}{2} \\ E_{i_{e_s}} > E - \dfrac{\varepsilon_s}{2} \end{array} \right.$$

С другой стороны, можно построить конечный интервал (c, d) такой, что

$$|\bar{\varphi}(x)| < \frac{E}{2} \text{ при } \begin{cases} x \leqq c \\ x \leqq d \end{cases}$$

Следов., совокупность точек (8) вся лежит внутри конечной области и имеет одну по крайней мере точку сгущения, т. е. из нее можно выделить совокупность

$$X_{m_1}, X_{m_2}, \ldots X_{m_\delta} \ldots$$

такую, что

$$(10) \ldots \lim_{\delta=\infty} X_{m_\delta}(x_{1,m_\delta}, x_{2,m_\delta}, \ldots x_{\mu_{m_\delta}, m_\delta}) = X(x_1, \ldots x_\mu).$$

В силу (7) имеем:

$$E \geqq \bar{\varphi}(X_{m_\delta}) > E - \varepsilon_{m_\delta}.$$

Следов. в силу непрерывности функции $\bar{\varphi}(x)$

$$\bar{\varphi}(X) = \lim_{\delta=\infty} \bar{\varphi}(X_{m_\delta}) = E,$$

т. е.

$$x_1, x_2, \ldots x_\mu$$

суть точка уклонения для функции $\bar{\varphi}(x)$.

Далее при всяком δ $\mu_{m_\delta} \geqq n+2$, и в ряду

$$\bar{\varphi}_{m_\delta}(x_{1,m_\delta}), \bar{\varphi}_{m_\delta}(x_{2,m_\delta}) \ldots, \bar{\varphi}_{m_\delta}(x_{\mu_\delta, m_\delta})$$

есть по крайней мере $n+1$ перемен знака. Иными словами, можно выбрать при всяком δ числа

$$x_{i_1, m_\delta}, x_{i_2, m_\delta}, \ldots x_{i_{n+2}, m_\delta}$$

так, что числа

$$\varphi_{m_\delta}(x_{i_1, m_\delta}), \varphi_{m_\delta}(x_{i_2, m_\delta}) \ldots \varphi_{m_\delta}(x_{i_{n+2}, m_\delta})$$

представляют $n+1$ перемен знака и притом численно они все $\geqq \frac{E}{2}$.

Далее имеем

$$|\bar{\varphi}_{m_\delta}(x_{i_\varkappa, m_\delta}) - \varphi_{m_\delta}(x_{i_\varkappa})| \leqq |\varphi_{m_\delta}(x_{i_\varkappa, m_\delta}) - \varphi(x_{i_\varkappa, m_\delta})| +$$
$$+ |\varphi(x_{i_\varkappa}) - \varphi_{m_\delta}(x_{i_\varkappa})| + |\bar{\varphi}(x_{i_\varkappa, m_\delta}) - \bar{\varphi}(x_{i_\varkappa})|$$
$$< \varepsilon_{m_\delta} + \varepsilon'_\delta = \varepsilon''_\delta, \qquad \lim_{\delta=\infty} \varepsilon''_\delta = 0 \quad (\varkappa = 1, 2 \ldots n+2)$$

Следов., при δ достаточно большом $\bar{\varphi}_{m_\delta}(x_{i_\varkappa})$ одного знака с $\bar{\varphi}_{m_\delta}(x_{i_\varkappa, m_\delta})$ и сколь угодно близко по численному значению $E_{m_\delta} > 0$.

Иными словами, ряд

$$(11) \ldots \bar{\varphi}_{m_\delta}(x_{i_1}), \bar{\varphi}_{m_\delta}(x_{i_2}) \ldots \varphi_{m_\delta}(x_{i_{n+2}})$$

представляет $n+1$ перемен знака, а потому

$$x_{i_1} \mp x_{i_2} \mp \ldots \mp x_{i_{n+1}},$$

т. е.

$$\mu > n+1.$$

Так как далее при всяком x

$$\bar{\varphi}(x) = \lim_{\delta=\infty} \varphi_{m_\delta}(x),$$

то при δ достаточно большом ряд (11) представляет столько же перемен знака, сколько ряд

$$\bar{\varphi}(x_1), \bar{\varphi}(x_2), \ldots \bar{\varphi}(x_{n+1}),$$

т. е. этот последний ряд, и *à fortiori* ряд

$$\bar{\varphi}(x_1), \bar{\varphi}(x_2), \ldots \bar{\varphi}(x_\mu)$$

содержит по крайней мере $n+1$ перемен знака.

Мы доказали, следов., что $\eta > n+1$.

Вместе с тем доказана единственность функции $\bar{\varphi}_\kappa(x)$ и полинома $\bar{q}(x)$, так что

$$(12) \ldots\ldots \begin{cases} \bar{q}(x) = \lim\limits_{\kappa=\infty} q_\kappa(x) \\ \bar{\varphi}(x) = \lim\limits_{\kappa=\infty} \varphi_\kappa(x) \\ E = \lim\limits_{\kappa=\infty} E_\kappa, \end{cases}$$

где $\bar{\varphi}_\kappa(x)$ ($\kappa = 1, 2 \ldots$), напомним, что суть функции (φ) наименее уклоняющиеся от нуля в промежутках (a_κ, b_κ), выбранных совершенно произвольно, лишь бы они расширялись беспредельно.

Замечания. 1⁰. Доказательство существования $\bar{\varphi}(x)$ не требует непрерывности функций $f(x)$ и $p(x)$; достаточно, чтобы они были однозначны и ограничены в интервале $(-\infty, \infty)$.

2⁰. Третья теорема § 1 очевидно сохраняет силу и для интервала $(-\infty, \infty)$.

Теорема III. При возрастании степени полинома $\bar{q}(x)$ уклонение E стремится к определенному пределу.

Будем писать в дальнейшем E_n вместо E. Очевидно

$$E_1 \geqq E_2 \geqq \ldots \geqq E_n \geqq \ldots$$

Так как все $E_n > 0$ [1]), то существует

$$\lim_{n=\infty} E_n = E \geqq 0. \text{ ч. т. д.}$$

---

[1]) Предполагая, что f(x) не совпадает в рассматриваемом промежутке ни с каким выражением вида p(x) (q^n ф $+ \ldots$).

Полученные результаты справедливы, разумеется, и для интервалов (A, ∞), $(-\infty, B)$, каковы бы ни были A B.

В случае конечного промежутка *всегда* имеет место равенство

$$(13) \ldots \lim_{n=\infty} E_n = 0.$$

В бесконечном промежутке (13) не всегда выполняется. Если оно имеет место, то будем говорить, что *функция $f(x)$ допускает беспредельное приближение с помощью функции $p(x)$. При заданной функции $p(x)$ только определенные, вообще говоря, классы непрерывных функций $f(x)$ допускают беспредельное приближение,* как мы это и покажем.

Пусть (13) выполнено. Повторяя рассуждения *Borel'я* [1]), убеждаемся, что степень полинома $\bar{q}(x)$ растет беспредельно вместе с n. Вместе с тем справедлива

Теорема. Если $f(x)$ принадлежит к классу функций, допускающих беспредельное приближение с помощью функции $p(x)$, то существует разложение

$$f(x) = p(x)\,|\,Q_1(x) + Q_2(x) + \ldots Q_n(x) \ldots|,$$

обладающее следующими свойствами:

1) *все $Q_n(x)$ суть полиномы, степени коих, не убывая, растут беспредельно вместе с n;*

2) *разложение сходится равномерно при всех значениях x и быстрее, чем всякое другое разложение того же вида;*

3) *если $p(x)$ положительно при всех значения x, то разложение это единственное.*

Доказательство получается непосредственно, полагая

$$Q_1(x) = \bar{q}_1(x),\quad Q_n(x) = \bar{q}_n(x) - \bar{q}_{n-1}(x) \quad (n = 2, 3, \ldots);$$

Мы можем рассматривать полученное разложение, как распространение теоремы Вейерштрасса на случай бесконечного промежутка.

5. Приступая к розысканию тех условий, при каких имеет место равенство

$$(13) \ldots \lim E_n = E = 0,$$

сделаем еще одно допущение: *функция*

$$(14) \ldots F(x) = \frac{f(x)}{p(x)}$$

---

1) loc cit.

непрерывна при всех значениях x и ограничена в промежутке $(-\infty, \infty)$. При всяком x выполняется неравенство

$$(15)\ldots\ |F(x+\delta)-F(x)| < \varepsilon(\delta),$$

где положительная функция $\varepsilon(\delta)$ стремится к нулю вместе с δ.

Покажем, что при известных добавочных условиях относительно $p(x)$ можно построить полином $Q(x)$ достаточно высокой степени, так что

$$(16)\ldots\ |f(x)-p(x)Q(x)| < h \text{ при } -\infty \leq x \leq \infty,$$

где h любое наперед заданное положительное число.

Воспользуемся результатами Jackson'а: [1])

При любом n можно построить полином степени n $\Pi_n(x)$ такой, что [2])

$$(17)\ldots\ |F(x)-\Pi_n(x)| < \varepsilon(\delta)\left\{1+l\frac{A}{n\delta}\right\} \text{ при } -A \leq x \leq A,$$

каково бы ни было положительное число A (l — численная постоянная).

Пусть A, n, δ выбраны так, что

$$(18)\ldots\ \varepsilon(\delta)\left\{1+l\frac{A}{n\delta}\right\} < \frac{h}{p_{max.}} = h_1,$$

тогда

$$(19)\ldots\begin{cases} |F(x)-\Pi_n(x)| < h_1 \\ |f(x)-p(x)\Pi_n(x)| < h \\ |\Pi_n(x)| < h_1 + F_{max.} = h_2 \end{cases} \text{при } -A \leq x \leq A.$$

Рассмотрим функцию

$$|p(x)x^n|.$$

Она имеет в промежутке $(-\infty, \infty)$ один или несколько *maxima* при некоторых значениях x. Наибольшее по абсолютному значению из этих x пусть будет

$$x = \omega(n).$$

Коротко скажем: *значение $x=\omega(n)$ дает самый дальний maximum функции* $|p(x)x^n|$.

Тогда

$$(20)\ldots\ |p(x)x^n| < |p(\omega(n))(\omega(n))^n| \text{ при } |x| > |\omega(n)|$$

[1]) „Ueber die Annäherung stetiger Funstionen....“. Göttingen 1911.

[2]) Наводящие рассуждения см. W. Stekloff „Théoréme de fermeture pour les polynomes de Laplace-Hermite-Tchebyshefj“ и Я. В. Успенский. „О сходимости формул механических квадратур между бесконечными пределами“, ИАН 1916.

Далее, если выполнено (19), то по известной теореме Чебышёва

$$|\Pi_n(x)| \leqq h_2 \left\{\frac{(x+\sqrt{x^2-A^2})^n+(x-\sqrt{x^2-A^2})^n}{2A^n}\right\} \text{ при } |x| \geqq A$$

или

$$|\Pi^n(x)| \leqq h_2 \left|\frac{2x}{A}\right|^n \text{ при } |x| \geqq A.$$

Следов.

$$(21)\ldots |p(x)\Pi_n(x)| < |h_2| p(x) \left(\frac{2x^n}{A}\right)| \text{ при } |x| \geqq A.$$

Мы желаем, чтобы выполнялось неравенство

$$(22)\ldots |p(x)\Pi_n(x)| < \frac{h}{2} \text{ при } |x| \geqq A.$$

В силу (20) и (21) мы удовлетворим (22), взяв

$$(23)\ldots A = 2|\omega(n)|$$

и выбрав n так, чтобы иметь

$$(24)\ldots p(\omega(n)) < \frac{h}{2h_2}.$$

Если выбрать n так, чтобы было удовлетворено неравенство

$$(25)\ldots |f(x)| < \frac{h}{2} \text{ при } |x| > 2|\omega(n)|,$$

то наверно

$$(26\ldots |f(x) - p(x)\Pi_n(x)| < h \text{ при } |x| > A = 2|\omega(n)|.$$

Функция $|\omega(n)|$ вообще растет беспредельно вместе с n.

В виду условий, наложенных на функции $p(x)$ и $f(x)$, (24) и (25) наверно выполняются, если взять n достаточно большим, т. е.

$$(27)\ldots |f(x)-p(x)\Pi_n(x)| h \text{ при } |x| > A = 2|\omega(n)| \ (n \geqq n_0).$$

Все сводится к возможности удовлетворить неравенству (18), которое перепишется так:

$$(28)\ldots \varepsilon(\delta)\left\{1+2l\frac{|\omega(n)|}{n\delta}\right\} < h_1.$$

Можно сразу указать случай, когда (28) выполняется, именно

$$(29)\ldots \lim_{n=\infty} \frac{\omega(n)}{n} = 0.$$

Действительно, если K означает произвольно выбранное положительное число, то берем δ_0 настолько малым, чтобы иметь

$$\varepsilon(\delta_0) < \frac{h_1}{K+1},$$

что всегда возможно, и затем $n=n_1$ настолько большим, чтобы иметь (в силу (29))

$$2L\frac{|\omega(n)|}{n\delta_0}<K \quad (n\geq n_1).$$

Взяв $n=n_2$=наибольшему из чисел n_1, n_0, мы получим:

$$|f(x)-p(x)\Pi_{n_2}(x)|<h \text{ при } -\infty\leq x\leq\infty.$$

Так как h произвольно мало, то справедлива

Теорема I. Если функция $x=\omega(n)$, дающая самый дальний maximum функции $|p(x)x^n|$ удовлетворяет условию

$$\lim_{n=\infty}\frac{\omega(n)}{n}=0,$$

то всякая непрерывная функция $f(x)$, для которой отношение

$$F(x)=\frac{f(x)}{p(x)}$$

непрерывно и ограничено в интервале $(-\infty,\infty)$, допускает беспредельное приближение с помощью функции $p(x)$) т. е. для нея*

$$E=\lim_{n=\infty}E_n=0.$$

Порядок E_n относительно $\frac{1}{n}$ не ниже наинисшего из порядков $p(\omega(n))$ и $\varepsilon\left(\frac{|\omega(n)|}{n}\right)$.

Пусть рассматриваемый интервал есть $(0,\infty)$.

Допустим, что условие (29) не выполняется, но

$$(30) \quad \ldots \quad \lim_{n=\infty}\frac{\sqrt{\omega(n)}}{n}=0.$$

Подчиним функции $f(x)$ и $p(x)$ следующим условиям:

При всяком x имеем:

$$(31) \quad \ldots \quad \left|\begin{array}{ll} |F(x+\delta)-F(x)|<\varepsilon(\delta) & F(x)=\frac{f(x)}{p(x)} \\ |F_1(x+\delta)-F_1(x)|<\varepsilon(\delta) & F_1(x)=F(x^2). \end{array}\right.$$

По Jackson'у найдем полином степени $2n$ $\Pi_{2n}(x)$, такой, что

$$|E_1(x)-\Pi_{2n}(x)|<\varepsilon(\delta)\left\{1+L\frac{A}{2n\delta}\right\} \text{ при } -A\leq x\leq A.$$

*) Разумеется, считая выполненными условия (2).

Заменяя x на $-x$ и полагая

$$\frac{\Pi_{2n}(x)+\Pi_{2n}(-x)}{2}=a_0 x^{2n}+a_1 x^{2n-2}+\ldots=\Pi_n(x^2)$$

находим:

$$|F(x^2)-\Pi_n(x^2)|<E(\delta)\left(1+L\frac{A}{2n\delta}\right) \text{ при} -A\leq x\leq A$$

или, заменяя x^2 на x:

$$|F(x)-\Pi_n(x)|<E(\delta)\left(1+L\frac{A}{2n\delta}\right) \text{ при } 0\leq x\leq A^2.$$

Если δ, A, n выбраны так, что

$$E(\delta)\left(1+L\frac{A}{2n\delta}\right)<\frac{h}{p_{max}}$$

то

$$|F(x)-\Pi_n(x)|<\frac{h}{p_{max}}=h_1\ (0\leq x\leq A^2)$$

$$|\Pi_n(x^2)|<\frac{h}{p_{max}}+F_{max}=h_2\ (-A\leq x\leq A).$$

Тогда по теореме Чебышева

$$|\Pi_n(x^2)|<h_2\left(\frac{2x}{A}\right)^{2n} \text{ при } |x|>A$$

$$|\Pi_n(x)|<h_2\left(\frac{4x}{A}\right)^{n} \text{ при } x\geq A^2.$$

Вводя функцию $x=\omega(n)$, дающую самый дальний *maximum* функций $p(x)x^n$ и повторяя предыдущия рассуждения, убеждаемся, что достаточно взять

$$A=2\sqrt{w(n)},$$

и так как

$$\lim_{n=\infty}\frac{\sqrt{w(n)}}{n}=0,$$

то при произвольном h

$$|f(x)-p(x)\Pi_n(x)|<h \text{ при } 0\leq x\leq\infty\ (n\geq n_0),$$

так что и в этом случае

$$\lim_{n=\infty}E_n=0,$$

Отсюда

Теорема II.

Если функция $x = \omega(n)$, дающая самый дальний maximum функции $p(x)\, x^n$ в интервале $(0, \infty)$ такова, что

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sqrt{w(n)}}{n} = 0,$$

то непрерывная функция $f(x)$, удовлетворяющая при всяком x условиям

$$|F(x+\delta) - F(x)| < \varepsilon(\delta) \qquad F(x) = \frac{f(x)}{p(x)}$$

$$|F_1(x+\delta) - F_1(x)| < \varepsilon(\delta) \qquad F_1(x) = F(x^2)$$

допускает беспредельное приближение с помощью функции $p(x)$ в интервале $(0, \infty)$, т. е. для нея

$$\lim_{n=\infty} E_n = 0.$$

Порядок E_n не ниже наинизшего из порядков $p\left(\frac{\sqrt{w(n)}}{n}\right)$ и $\varepsilon\left(\frac{\sqrt{w(n)}}{n}\right)$.

Для интервала $(-\infty, \infty)$ или $(0, \infty)$ и функции $p(x) = e^{kx^\lambda}$ $(k > 0,\ x > 0)$ имеем

$$w(n) = \left(\frac{n}{k\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}.$$

Предыдущия теоремы позволяют высказать следующия предложения.

В интервале $(-\infty, \infty)$ для функции $p(x) = e^{kx^\lambda}$ $(k > 0)$ $\lambda = \frac{2l}{2m+1} > 1$, l, m - цельные, имеет силу теорема I настоящего §.

В интервале $(0, \infty)$ для функции $p(x) = e^{kx^\lambda}$ $(k > 0\ \lambda > \frac{1}{2})$ имеет силу теорема II настоящего §.

Соответственно имеем:

$$(32) \qquad E_n = 0\left(\varepsilon\left(n^{\frac{1}{\lambda}-1}\right)\right)$$

$$E_n = 0\left(\varepsilon\left(n^{\frac{2}{\lambda}-1}\right)\right).$$

Приложение к полиномам Чебышева.

6. **Пусть функция** $p(x)$ **ограничена и не отрицательна и интегрируема в интервале** $(-\infty, \infty)$. **Наверно существует интервал** (a, b) **такой, что**

$$p(x) > P_0 > 0 \qquad \text{при } a \leq x \leq b,$$

если только

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx \neq 0.$$

Пусть далее

$$\lim_{x=\pm\infty} p(x)\,x^i = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots)$$

Пусть $f(x)$ есть функция, интегрируемая и ограниченная в интервале $(-\infty, \infty)$ [1]). Так как

$$\lim_{x=\pm\infty} f(x)\,p(x) = 0,$$

то существует полином $\Pi_n(x)$ степени не выше n такой, что функция

$$(33) \qquad p(x)f(x) - p(x)\,\Pi_n(x)$$

наименее уклоняется от нуля в интервале $(-\infty, \infty)$. Мы условимся называть его „полиномом наилучшего приближения" для функции $f(x)$ и обозначим через $E_n(f)$ уклонение от нуля функции (33).

$$(34) \qquad E_n(f) = \text{maxim.}\ p(x)\,|f(x) - \Pi_n(x)| \quad \text{при } -\infty \leq x \leq \infty.$$

Введем в рассмотрение ортоганально-нормальную систему полиномов Чебышева

$$(35) \qquad \varphi_i(x) = \alpha_i x^i + \ldots,\ \alpha_i > 0,\ (i = 0, 1, 2 \ldots),$$

отвечающих интервалу $(-\infty, \infty)$ и характеристической функции

$$p^\alpha(x)\,q(x), \quad q(x) > 0 \text{ при } -\infty \leq x \leq \infty$$
$$\alpha = \text{пост.}$$

Полагаем:

$$f(x) \infty \sum_{0}^{n} A_i \varphi_i(x)\ ,\ A_i^1 = \int_{-\infty}^{\infty} p^\alpha(x)\,q(x)\,f(x)\,\varphi_i(x)\,dx$$

$$\Pi_n(x) = \sum_{0}^{\infty} A_i^1 \varphi_i(x)\ ,\ A_i = \int_{-\infty}^{\infty} p^\alpha(x)\,q(x)\,\Pi_n(x)\,\varphi_i(x)\,dx.$$

---

1) Достаточно, чтобы $p(x)\,f(x)$ было ограничено в интервале $(-\infty, \infty)$ и $\lim_{x=\pm\infty} p(x)\,f(x) = 0$.

Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} p^{\alpha}(x)\, q(x)\,[f(x) - \Pi_n(x)]^2 dx = \sum_0^n (A_i - A_i^1)^2 + S_n$$

$$S_n = \int_{-\infty}^{+\infty} p^{\alpha}(x)\, q(x) \Big[f(x) - \sum_0^n A_i\, \varphi_i(x) \Big]^2 dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} p^{\alpha}(x)\, q(x)\, f^2(x)\, dx - \sum_0^n A_i^2.$$

Имеем поэтому в силу (34):

$$(34) \ldots \quad 0 \leq S_n = \int_{-\infty}^{\infty} p^{\alpha}(x)\, q(x)\, f^2(x)\, dx - \sum_0^n A_i^2 \leq Q^2 E_n^2(f)$$

$$(37) \quad \sum_0^n (A_i - A_i^1)^2 < Q^2 E_n^2(f) \qquad Q^2 = \int_{-\infty}^{\infty} p^{\alpha-2}(x)\, q(x)\, dx.$$

$$|A_i - A_i^1| < QE_n(f) \quad (i < n)$$

Пусть функция $\varphi(x)$ такова, что существуют интегралы

$$\int_c^d p^{\alpha}(x)\, q(x)\, \varphi^2(x)\, dx, \qquad \int_c^d p^{\alpha}(x)\, f(x)\, \varphi(x)\, dx,$$

$$\int_c^d p^{\alpha}(x)\, q(x)\, \varphi(x)\, \varphi_i(x)\, dx \qquad (i = 0, 1, 2 \ldots).$$

Полагаем:

$$f(x) = \sum_0^n A_i\, \varphi_i(x) + P_n, \quad A_i = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\, f(x)\, \varphi_i(x)\, dx.$$

$$(38) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_c^d p^{\alpha}(x)\, q(x)\, f(x)\, \varphi(x) dx = \sum_0^n A_i B_i + T_n, \quad B_i = \\ \displaystyle\qquad = \int_c^d p^{\alpha}(x)\, q(x)\, \varphi(x)\, \varphi_i(x)\, dx \end{cases}$$

$$T_n = \int_c^d p^{\alpha}(x)\, q(x)\, \varphi(x)\, P_n\, dx.$$

Неравенство Буняковского-Шварца в связи с (36) дает:

$$(39) \qquad |T_n| < QE_n(f) \sqrt{\int_c^d p^{\alpha}(x)\, q(x)\, \varphi^2(x)\, dx}.$$

ибо

$$S_n = \int_{-\infty}^{\infty} p^{\alpha}(x)\, q\, P_n^2\, dx$$

Полагая здесь $\varphi(x) = 1$, $d(= x)$, находим

$$\int_c^x p^\alpha(x)\, q(x) f(x) dx = \sum_c^n A_i \int_c^x p^\alpha(x)\, q(x)\, \varphi_i(x) dx + T_n,$$

$$|T_n| < QE_n(f) \sqrt{\int_c^\infty p^\alpha(x)\, q(x)\, dx}.$$

Если существует интеграл

$$\int_c^d \frac{dx}{p^\alpha(x)\, q(x)}$$

то берем в (38) $\varphi(x) = \dfrac{1}{p^\alpha(x)\, q(x)}$ и находим:

$$\int_c^d f(x)\, dx = \sum_o^n A_i \int_c^d \varphi_i(x)\, dx + T_n$$

$$|T_n| < QE_n(f) \sqrt{\int_c^d \frac{dx}{p^\alpha(x)\, q(x)}}$$

Если $\varphi(x)$ интегрируемо во всем интервале $(-\infty, \infty)$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} p^\alpha(x)\, q(x) f(x)\, \varphi(x)\, dx = \sum_o^n A_i B_i + T_n,$$

$$B_i = \int_{-\infty}^{\infty} p^\alpha(x)\, q(x)\, \varphi(x)\, \varphi_i(x)\, dx$$

(42) $$|T_n| < QE_n(f) \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} p^\alpha(x)\, q(x)\, \varphi^2(x)\, dx}.$$

пусть $\varphi(x)$ непрерывно и ограничено в интервале $(-\infty, \infty)$.

Полагая.

$$\varphi(x) = \sum_o^n B_i\, \varphi_i(x) + P_n^1$$

$$f(x) = \sum_o^n A_i\, \varphi_i(x) + P_n$$

(A, B_i даны выше), находим в силу очевидных свойств функций P_n и P_n^1

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) f(x)\, \varphi(x) = \sum_c^n A_i B_i + \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\, P_n P_n^1\, dx,$$

или, помня (36)

(43) . . $$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) f(x)\, \varphi(x)\, dx = \sum_o^n A_i B_i + T_n$$

$$(43)\ .\ .\quad T_n = \left[\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\, P_n\, P_n^1\, dx\right] \leq Q^2\, E_n(f)\, E_n(\varphi).$$

Можно получить другие пределы для T_n:

$$\sum_0^n (A_i \pm B_i)^2 + Q^2 E_n^2 (f \pm \varphi) > \int_{-\infty}^{\infty} p^\alpha(x)\,(f \pm \varphi)^2 dx \geq =$$

$$= \sum_0^n (A_i \pm B_i)^2.$$

Комбинация этих неравенств легко дает

$$(44)\ .\ .\quad -\frac{Q^2}{4} E_n^2 (f - \varphi) < T_n = \left[\int_{-\infty}^{\infty} p^\alpha(x)\, q(x)\, f(x)\, \varphi(x)\, dx - \right.$$

$$\left. \sum_0^n A_i B_i \right] < \frac{Q^2}{4} E_n^2 (f + \varphi).$$

Наконец, неравенство (36) дает:

$$(45)\ .\ .\quad \sum_0^n A_i^2 + Q^2 E_n^2 (f) \geq \int_{-\infty}^{\infty} p^\alpha(x)\, q(x) f^2(x)\, dx \geq \sum_0^n A_i^2;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p^\alpha(x)\, q(x)\, f^2(x)\, dx = \sum_0^n A_i^2 + \theta Q^2 E_n^2(f)\ 0 \leq \theta < .$$

($\theta = 0$ только для случая, когда $f(x)$ есть полином степени n)[1].

Предположим теперь, что функции $p(x)$ и $f(x)$ таковы, что выполняется условие

$$(46)\qquad \lim_{n \to \infty} E_n(f) = 0.$$

Предыдущия неравенства показывают, что тогда

$$(47)\ .\ .\qquad \lim_{n \to \infty} S_n = 0, \qquad \lim_{n = \infty} T_n = 0$$

$$S_n = \sum_{n+1}^{\infty} A_i^2 < Q^2 E_n^2 (f).$$

Если $p(x)$ и $f(x)$ удовлетворяют (46), *то для функции $f(x)$ имеет силу уравнение замкнутости*:

$$(48)\ .\ .\qquad \int_{-\infty}^{\infty} p^\alpha(x)\, q(x) f^2(x)\, dx = \sum_0^n A_i^2,$$

$$A_i = \int_{-\infty}^{\infty} p^\alpha(x)\, q(x)\, f(x)\, \varphi_i(x)\, dx$$

1) Ср. Я. Шохат: «К теории полиномов Чебышева», Известия Уральского Государственного Университета, Екатеринбург, печат.

какова бы нибыла функция $q(x)$, не отрицательная в интервале $(-\infty, \infty)$, при всякой постоянной α, если только существует интеграл

$$(49) \ldots \qquad \int_{-\infty}^{\infty} p^{\alpha-2}(x)\, q(x)\, dx\,.$$

Вместе с тем

$$\int_{-\infty}^{\infty} p^{\alpha}(x)\, q(x)\, f(x)\, \varphi(x)\, dx = \sum_{0}^{\infty} A_i B_i\,.$$

Обратно: *если уравнение замкнутости* (48) *не имеет место, то* $\lim_{n=\infty} E_n(f) > 0$

ибо, как показывает (36):

$$E_n(f) > \frac{\sqrt{S_n}}{Q}$$

$$\lim_{n=\infty} E_n(f) \geq \frac{\sqrt{\delta}}{Q}\,,$$

где по условию,

$$\delta = \lim_{n=\infty} S_n > 0 \text{ [1]}.$$

Полученные результаты справедливы очевидно и для интервалов

$$(A, \infty), \ (-\infty, A)$$

где A какое угодно.

В разбираемом случае функция (14) § 5

$$F(x) = \frac{p(x) f(x)}{p(x)} = f(x).$$

Поэтому, припоминая теоремы I, II того же §, заключаем:

1⁰ *уравнение замкнутости* (48) *при соблюдении* (49) *имеет место для всякой функции* $f(x)$, *непрерывной и ограниченной в интервале* $(-\infty, \infty)$ *если* $\omega(n)$, удовлетворяет (29).

2⁰ В интервале $(0, \infty)$ уравнение замкнутости имеет место для всякой функции $f(x)$, непрерывной и ограниченной в рассматриваемом интервале и удовлетворяющей при всяком x условиям

$$(50) \ldots \qquad [f(x+\delta) - f(x)] < \varepsilon(\delta)$$

$$(51) \ldots \qquad [f(x+\delta)^2 - f(x^2)] < \varepsilon(\delta),$$

где $\varepsilon(\delta)$ стремится к нулю вместе с δ. если $\omega(n)$ удовлетворяет (30) и если существует интеграл

$$\int_{0}^{\infty} p^{\alpha-2}(x)\, q(x)\, dx.$$

---

[1]) Из выражения для S_n (стр. 21) видно, что δ всегда существует.

Повторяя рассуждения В. А. Стеклова [1]), мы убеждаемся, что *при указанных условиях уравнение замкнутости имеет место для всякой интегрируемой функции*, иными словами, справедливы следующия предложения.

Теорема I. Всякая система полиномов Чебышева, отвечающая интервалу $(-\infty, \infty)$ *и характеристической функции*

$$p^{\alpha}(x)\; q(x) \qquad \begin{matrix} p(x) > 0 \\ q(x) \geq 0 \end{matrix} \quad \text{при } -\infty < x < \infty$$

есть система замкнутая, если соблюдены следующия условия:
1^0 $p(x)$ *ограничено в рассматриваемом интервале*

$$2^0 \quad \lim_{x=\pm\infty} p(x)\, x^i = 0 \qquad (i = 0, 1, 2 \;.\;.\;)$$

$$3^0 \quad \lim_{n=\infty} \frac{\omega(n)}{n} = 0,$$

где $x = \omega(n)$ *дает самый дальний maximum функции* $[p(x)x^n]$. *Т. е. для всякой интегрируемой функции* $f(x)$ *справедливо равенство.*

$$\int_{-\infty}^{\infty} p^{\alpha}(x)\; q(x) f^2(x)\, dx = \sum_{0}^{\infty} {}_i A_i^2$$

$$A_i = \int_{-\infty}^{\infty} p^{\alpha}(x)\; q(x)\; \varphi_i(x) f(x)\, dx,$$

какова бы ни была функция $q(x)$, *и какова бы ни была постоянная,* α *если только существует интеграл*

$$\int_{-\infty}^{\infty} p^{\alpha-2}(x)\, q(x)\, dx.$$

Если $f(x)$ *непрерывно и ограничено в интервале* $(-\infty, \infty)$ *и удовлетворяет при всяком* x *условию*

$$| f(x+\delta) - f(x) | < E(\delta) \qquad (\lim_{\delta=0} E(\delta) = 0),$$

то

$$\int_{-\infty}^{\infty} p^{\alpha}(x)\, q(x)\, f^2(x)\, dx = \sum_{0}^{\infty} {}_i A_i^2 + E_{n_1}, \lim_{n=\infty} E_n = 0,$$

---

[1]) W. Stekloff. Théoreme de Fermeture pour les polinomes de Tchébysheff—Laquerre, ИАН, 1916.
Jd. Théorème de Fermeture pour les polynomes de Laplace—HermiteTchébycheff, ibid-1916

где порядок En *относительно* $\frac{1}{n}$ *не ниже наинизшего из порядков величин*

$$p\,(|\omega(n)|) \text{ и } E\left(\frac{|\omega(n)|}{n}\right)$$

Теорема II. В случае системы полиномов Чебышева, отвечающих интервалу $(0,\infty)$, *замкнутость ея сохраняется и тогда, если*

$$\lim_{n=\infty} \frac{\omega(n)}{n}=\infty, \text{ но } \lim_{n=\infty} \frac{\sqrt{\omega(n)}}{n}=0.$$

При этом для функции $f(x)$, *непрерывной и ограниченной в интервале* $(0,\infty)$ *и удовлетворяющей при всяком* x *условиям*

$$|f(x+\delta)-f(x)| < E(\delta)$$

$$\left|f\left((x+\delta)^2\right)-f(x^2)\right| < E(\delta), \; (\lim_{\delta=0} E(\delta)=0$$

имеем
$$\int_0^{\infty} p^{\alpha}(x)\,q(x)\,f^2(x)\,dx = \sum_0^n A_i^2+E_n$$

$$\lim_{n=\infty} En=0,$$

и порядок E_n *относительно* $\frac{1}{n}$ *не ниже наинизшего из порядков величин*

$$p\,(\sqrt{\omega(n)}) \text{ и } E\left(\frac{\sqrt{\omega(n)}}{n}\right)$$

Мы видели выше, что в интервале $(-\infty, \infty)$ функция

$$p(x)=e^{\kappa x\lambda}$$

удовлетворяет при всяком $\kappa > 0$ и $\lambda > 1$ условиям 1^0—3^0 теоремы I.

Далее, если существуют интегралы

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\kappa x\lambda}\, q(x)\, dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\kappa-E)x\lambda}\, q(x)\, dx \; (E>0),$$

то всегда можно найти числа α и β так, что

$$\kappa=\alpha\beta, \; \kappa-E=\beta\,(\alpha-2), \; \beta>0.$$

Аналогичные заключения справедливы для интервала $(0, \infty)$ и функции

$$p(x) = e^{-kx^\lambda} \qquad (k>0,\ \lambda > \tfrac{1}{2}),$$

ибо она удовлетворяет условиям теоремы II.

Поэтому справедливы такие предложения.

Теорема III. Система полиномов Чебышева $\omega_i(x)$, *отвечающих интервалу* $(-\infty, \infty)$ *и характеристической функции*

$$e^{-kx^\lambda} q(x),\ \lambda > 1,\ k>0,\ q(x) \geq 0 \text{ при } -\infty \leq x \leq \infty,$$

есть система замкнутая, какова бы ни была функция $q(x)$, *если только существует интеграл*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(k-E)x^\lambda} q(x)\, dx$$

при некотором $E>0$.

Если $f(x)$ *непрерывно и ограничено в промежутке* $(-\infty, \infty)$ *и удовлетворяет при всех* x *условию*

$$|f(x+\delta) - f(x)| < E(\delta),$$

то

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-kx^\lambda} q(x) f^2(x)\, dx = \sum_0^n A_i^2 + 0\left(E\left(n^{\frac{1}{\lambda}}\right)^1\right)$$

$$A_i = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-kx^\lambda} q(x) f(x) \varphi_i(x)\, dx$$

Теорема IV. Система полиномов Чебышева $\Phi_i(x)$, *отвечающих интервалу* $(0, \infty)$ *и характеристической функции*

$$e^{-kx^\lambda} q(x),\ \lambda > \tfrac{1}{2},\ k>0,\ q(x) \geq 0 \text{ при } 0 \leq x \leq \infty$$

есть система замкнутая, какова бы ни была функция $q(x)$, *если только существует интеграл*

$$\int_0^{\infty} e^{-(k-E)x^\lambda} q(x)\, dx$$

при некотором положительном E.*)

*) Как мне любезно сообщил проф. Я. В. Успенский, аналогичный результат им получен другим путем.

Если $f(x)$ непрерывна и ограничена в интервале $(0, \infty)$ и удовлетворяет при всех x условиям:

$$|f(x+\delta)-f(x)| < E(\delta)$$

$$\left|f\left((x+\delta)^3\right)-f(x^2)\right| < E(\delta)$$

то

$$\int_0^\infty e^{-kx^\lambda} q(x) f^2(x)\,dx = \sum_0^n A_i^2 + 0\left(E\left(n^{-\frac{1}{\lambda}}\right)\right),$$

$$A^i = \int_0^\infty e^{-kx^\lambda} q(x) f(x)\, \Phi_i(x)\,dx$$

Положив в теоремах III, IV соответственно $\lambda=2$, $\lambda=1$, $q(x) = 1$, $q(x) = x^{\beta-1}$ получаем

Следствия. 1°. *Система полиномов Лапласа—Эрмита—Чебышева есть замкнутая.*[1])

2°. *Система полиномов Чебышева—Лагерра есть замкнутая.*[1])

Как видно, *это есть лишь весьма частные случаи общих теорем, установленных в этом* §.

В качестве другого приложения предыдущей теории решим такую задачу.

Задача. Определить наибольшее численное значение старшего коэффициента g_{n+1} полинома

$$g(x) = g_{n+1} x^{n+1} + \ldots,$$

зная, что уклонение от нуля в интервале $(-\infty, \infty)$ функции $p(x)g(x)$, где $p(x)$ удовлетворяет условиям (2), не превышает данного положительного числа M.)

Решение. Пусть

$$\bar{g}(x) = x^{n+1} + \ldots$$

есть полином, дающий наименьшее уклонение в промежутке $(-\infty, \infty)$ функции $p(x)\bar{g}(x)$, E уклонение ея от нуля, тогда

$$(52) \quad \ldots \quad |g_{n+1}| \leq \frac{M}{E};$$

и знак равенства соответствует только полиному

$$g(x) = \frac{M}{E}\bar{g}(x).$$

---

[1]) Cp. W. Stekloff loc. cit.

Действительно, существование $g(x)$ вытекает из предыдущих исследований, принятым

$$f(x) = p(x)\, x^{n+1}.$$

Чтобы доказать (52), достаточно заметить, что при $g_{n+1} \pm 0$ функция

$$\frac{p(x)\, g(x)}{g_{n+1}}$$

есть функция вида

$$p(x)\left(x^{n+1} + \ldots\right),$$

поэтому

$$\frac{M}{|g^{n+1}|} \geq E,$$

и знак $=$ отвечает полиному

$$g(x) = \frac{M}{E}\,\bar{g}(x)$$

и только ему.

Решение поставленной задачи, даваемое формулой (52), требует знания точной величины уклонения E, что возможно далеко не всегда. Дадим поэтому взамен точной формулы (52) приближенную, которая вместе с тем позволит оценить величину E и найдет приложение в теории полиномов Чебышева.

С этой целью введем снова ортогонально-нормальную систему полиномов Чебышева $\varphi_i(x)$ ($i=0,1,2 \ldots$), отвечающую интервалу $(-\infty, \infty)$ и характеристической функции

$$p^{\alpha}(x)\, q(x) \qquad , \ (\alpha = \text{пост.})$$

$$p(x) \geq 0, \ q(x) \geq \ \text{при} \ -\infty \leq x \leq \infty$$

Формула

$$g_{n+1} = \int_{-\infty}^{\infty} p^{\alpha}(x)\, q(x)\, a_{n+1}\, \varphi^{n+1}(x)\, g(x)\, dx$$

дает с помощью неравенства Буняковского—Шварца

$$(53)\ |g_{n+1}| \geq \ldots a_{n+1}, \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} p^{\alpha}(x)\, q(x)\, g^2(x)\, dx} <$$

$$a_{n+1} M \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} p^{\alpha-2}(x)\, q(x)\, dx}$$

Применяя это к полному $g(x)$, выводим:

$$(54) \quad \ldots \quad \frac{M}{|q_{n+1}|} \geq E > \frac{1}{a_{n+1}Q}$$

$$\left(Q^2 = \int_{-\infty}^{\infty} p^{\alpha-2}(x)\, q(x)\, dx\right)$$

Формула (54) и есть искомая.

Обратно, из (53,54) можно найти нижнюю границу для a_{n+1}:

$$(55) \quad \ldots \quad a_{n+1} > \frac{1}{EQ}$$

$$(56) \ldots \begin{cases} a_{n+1} > \dfrac{1}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} p^{\alpha}(x)\, q(x) \left(x^{n+1} + \ldots\right)^2}} \\[2ex] a_{n+1} > \dfrac{1}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} p^{\alpha}(x)\, q(x)\, x^{2n+2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{C_{2n+2}}} \end{cases}$$ [1]), [1])

C_i есть так называемый i-ый „момент" функции $p^{\alpha}(x)\, q(x)$. Ясно, что аналогичные результаты справедливы для интерваловъ

(A, ∞), $(-\infty, A)$ (A—какое угодно).

Приложим сказанное к двум частным случаямъ.

1°. Интервалъ $(-\infty, \infty)$; $p(x) = e^{-kx^2}$ $(\kappa > o)$.

Для уклонения E функции

$$e^{kx^2}\left(x^{n+1} + \ldots\right),$$

наименее уклоняющейся в интервале $(-\infty, \infty)$, получаем:

$$E > \frac{1}{a_{n+1}\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\alpha-2)\,kx^2}\, q(x)\, dx}}$$

Примем, что $q(x) > 0$ при $-\infty \leq x \leq \infty$.

Тогда, как я показалъ,[2])

$$a_{n+1} > \sqrt[4]{\frac{\alpha\kappa}{\Pi}} \cdot \sqrt{\frac{(2\alpha x)^{n+1}}{(n+1)!\; q_{min}}}$$

---

[1]) В применении к конечному интервалу, для определенности $(-1, 1)$, берем (54) $p(x) = 1$, $q(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ и получаем $|g_{n+1}| < M.\, 2^n \sqrt{2}$; (55) при $p(x) = 1$ получаем: $a_{n+1} > \frac{2n}{Q}$

[2]) Ср. Я. Шохат, loc cit.

и предыдущее неравенство дает:

$$E > \sqrt{\frac{(n+1)!}{(2\kappa)^{n+1}}\;\frac{q_{\min}}{q_{\max}}\sqrt[4]{\frac{\alpha-2}{\alpha^{2n+3}}}}$$

Правая часть этого неравенства достигаетъ наибольшей величины при

$$q(x) \equiv 1,\quad \alpha = 2 + \frac{1}{n+1}$$

так что

$$(57)\qquad \frac{M}{|q_{n+1}|} \geqq E > \sqrt{\frac{(n+1)!\,(n+1)^{n+1}}{(2\kappa)^{n+1}}\;\frac{1}{\sqrt[4]{(2n+3)^{2n+3}}}}$$

$$M = maxim\; e^{-kx^2}\left|q_{n+1}\,x^{n+1} + \ldots\right| \text{ при } -\infty \leqq x \leqq \infty.$$

Так как для функции $e^{-kx^2}x^{n+1}$

$$(58)\quad \sqrt{\left(\frac{n+1}{2e\kappa}\right)^{n+1}} > E > \sqrt{\left(\frac{n+1}{2\kappa}\right)^{n+1}(n+1)!\;\frac{1}{\sqrt[4]{(2n+3)^{2n+3}}}}$$

что с помощью формулы Stirling'а перепишем так:

$$(59)\ldots\quad \sqrt{\left(\frac{n+1}{2e\kappa}\right)^{n+1}} > E > \sqrt{\left(\frac{n+1}{4e\kappa}\right)^{n+1}}\cdot\sqrt[4]{\frac{\pi}{e}\cdot\delta_n'},$$

$$\lim_{n=\infty}\delta_n = 1$$

так что

$$(60)\ldots\quad |1\,g_{n+1}| < M\sqrt{\left(\frac{4e\kappa}{n+1}\right)^{n+1}}\sqrt[4]{\frac{e}{\pi}\cdot\delta_n}$$

$$\lim_{n=\infty}\delta_n = 1.$$

2°. Интервал $(0,\ \infty)$; $p(x) = e^{kx}$ $(\kappa > 0)$.

Разсуждая подобно предыдущему, находим

$$(61)\quad \begin{cases} \ldots\quad \dfrac{M}{|g_{n+1}|} \geqq E > (n+1)!\left(\dfrac{n+1}{\kappa}\right)^{n+1}\dfrac{1}{\sqrt{(2n+3)^{2n+3}}} \\[2ex] M = maxim\; e^{-kx}\left|g_{n+1}\,x^{n+1} + \ldots\right| \text{ при } 0 \leqq x \leqq \infty. \end{cases}$$

С помощью функции $e^{-kx} x^{n+1}$ и формулы Stirling'а находим:

$$\left(\frac{n+1}{ek}\right)^{n+1} > E > \left(\frac{n+1}{k}\right)^{n+1} \frac{(n+1)}{\sqrt{(2n+3)^{2n+3}}}$$

$$(62)\ldots \quad \left(\frac{n+1}{ek}\right)^{n+1} > E > \left(\frac{n+1}{2ek}\right)^{n+1} \sqrt{\frac{\pi}{e}}\cdot \delta_n$$

$$|g_{n+1}| < M\sqrt{\frac{e}{\pi}}\cdot\left(\frac{2ek}{n+1}\right)^{n+1}\frac{1}{\delta'_n}$$

$$\lim_{n=\infty} \delta_n = \lim_{n=\infty} \delta'_n = 1.$$

8. Вернемся к полиному наилучшего приближения $\Pi_n(x)$ § 6. Неравенства (37) показывают, что если $p(x)$ и $f(x)$ таковы, что

$$\lim E_n(f) = 0,$$

то и

$$\lim_{n=\infty}\left(A_i - A'_i\right) = 0 \qquad (i=0,\ 1,\ 2\ \ldots),$$

иными словами, *при указанных условиях разложение полинома* $\Pi_n(x)$ *в ряд по полином Чебышева с возрастанием* n *стремится совпасть с разложением самой функции* $f(x)$.

Полагая далее

$$\Pi_n(x) = h_n x^n + \ldots,$$

выводим из наших неравенств

$$(63)\ \ldots \left\{\begin{aligned} &\left|A_n - \frac{h_n}{a_n}\right| < QE_n(f) \\ &\frac{|h_n|}{a_n} < QE_n(f) + A_n\,. \end{aligned}\right.$$

Если имеет место уравнение замкнутости, то

$$S_n = \sum_{n+1}^{\infty} A_i^2 < Q^2 E_n^2(f)$$

т. е.

$$(64)\ \ldots\ldots \quad |A_{n+1}| < QE_n(f)$$

и тогда

$$(65)\ \ldots\ldots \quad \left|\frac{h_n}{a_n}\right| < 2QE_{n+1}(f).$$

Если характеристическая функция $p(x)$ задана в конечном промежутке (a, b), то ее можно продолжить на весь бесконечный промежуток, считая

$$p(x) \equiv 0 \qquad \text{вне } (a, b).$$

J. Chokhatte.

Sur les fonctions s'écartant le moins possible de zèro dans un intervalle infini (Résumè).

Le but de cet article est d'étendre la théorie des fonctions s'écartant le moins possible de zéro dans un intervalle donné (supposé ordinairement) fini, au cas où les limites d'intervalle deviennent infinies.

Soient $f(x)$ et $p(x)$ deux fonctions données finies et continues pour chaque valeur réelle de x.

Soit encore

$$\lim_{x = \mp \infty} f(x) = 0,$$

$$\lim_{x = \mp \infty} p(x)\, x^{i} = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$p(x) \geq p_0 > 0 \qquad \text{ponr } a \leq x \geq b,\ a,\ b$$

désignant deux quantités fixes.

Je montre que *parmi les fonctions de la forme*

$$\varphi(x) = f(x) - p(x)(q_n x^n + \ldots + q_o) = f(x) - p(x)\, Q_n(x)$$

il existe au moins une fonction

$$\overline{\varphi}(x) = f(x) - p(x)\, Q_n(x)$$

s'écartant le moins possible de zéro dans l'intervalle $(-\infty, \infty)$. *Cette fonction est unique. Si* $p(x) > Po > 0$ *pour chaque valeur de* x *et atteint son ècart dans* $u \geq n+1$ *points.*

D'ailleurs, *il existe toujours*

$$\lim_{n = \infty} E_n = E \geq O.$$

Des résultats analogues subsistent pour les intervalles (A, ∞), $(-\infty, B)$, A, B étant arbitraires.

La fonction $|p(x)\, x^{n}|$ admet en général certains maxima dans (A, ∞). Soit $x = \omega(n)$ la valeur de x la plus èloignée de l'origine donnant un tel maximum.

Supposons que

$$\lim_{n = \infty} \frac{\omega^{\lambda}(n)}{n} = 0 \qquad \left(\begin{array}{ll} \lambda = 1 & \text{pour } A = -\infty \\ \lambda = \frac{1}{2} & \text{pour } A = 0 \end{array}\right)$$

Il existe alors certaines classes de fonctions continues $f(x)$, pour lesqnelles $\lim\limits_{n=\infty} E_n = 0$, comme dans le cas d'un intervalle fini.

La théorie développée ici est intimement liée avec celle de polynomes de Tchébycheff *Je* montre par exemple que *la suite des polynomes de Tchébycheff* $\varphi_i(x)$ $(i = 0, 1, 2 \ldots)$ correspondant á l'intervalle *(A, ∞) et á la fonetion caractéristique*

$p(x) = e^{-kx^\lambda} q(x)$ $(\kappa > 0, q(x) \geq 0$ pour $A \leq x \leq \infty$ *)est fermée*, c. à d. on a pour chaque fonction intégrable f(x)

$$\int_A^\infty p(x) f^2(x)\, dx = \sum_0^\infty A_i^2, \quad A_i = \int_A^\infty p(x) f(r) \varphi_i(x)\, dx$$

pourvu que

$$\begin{array}{c|c} \lambda = 1 & A = -\infty \\ \lambda = \frac{1}{2} & A = 0 \end{array}$$

s'il existe l'integrale $\int_A^\infty e^{(\kappa-\varepsilon) x^\lambda} q(x)\, dx$, *E désignant une certaine quantité positive.*

De la on déduit immédiatement la fermeture des polynomes de Laplace — Hermite — Tchébycheff ($A = -\infty$ $x = 2$, $q(x) = 1$) *et de Tchébycheff—Laguerre* ($A = o$, $\lambda = 1$, $q(x) = ^{\beta+1}$, $\beta > o$,

Les résultats précédents permettent enfin de résoudre le problème suivant.

Etant donnée la valeur maximum de $p(x)$, $g_{n+1} x^{n+1} + \ldots$ $+ go)$ *pour* $A \leq x \leq \infty$ *trouver la limite supérieure précise de* $|g_{n+1}|$.

Ekathérinbourg, Avril 1921.